26/05/2019
Φυλλάδιο #8
Άσκηση 1

Πρέπει ν.δ.ο για $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ η απεικόνιση $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ όπου $(y_1,y_2)=\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ είναι γραμμική. Αυτό ισχύει γιατί ξέρουμε από γραμμική I ότι αν $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ η απεικόνιση $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $(y_1,y_2)\mapsto a_1y_1+a_2y_2$ είναι γραμμική.
Άρα για $a_1=-x_1-\sqrt{3}x_2$ $a_2=-\sqrt{3}x_1+x_2$ ισχύει. Άρα η φ γραμμική ως προς την 2η μεταβλητή.
Πρέπει να δείξουμε επίσης ότι αν σταθεροποιήσουμε την $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ τότε η απεικόνιση $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $(x_1,x_2)\mapsto((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ είναι γραμμική. Αυτό ισχύει για παρόμοιο λόγο με την γραμμικότητα ως προς την 1η μεταβλητή.

β) $Q(x_1,x_2)=\varphi((x_1,x_2),(x_1,x_2))=-x_1^2-2\sqrt{3}x_1x_2+x_2^2$
Για να δούμε αν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη θέτουμε $A=$ πίνακας(φ)
$=\begin{bmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ $\Delta_1=\det|-1|=-1<0$
$\Delta_2=\det A=-4<0$
Αφού $\Delta_1<0$ η Q δεν είναι θετικά ορισμένη. Αφού $\Delta_1<0$ και $\Delta_2<0$ η Q δεν είναι αρνητικά ορισμένη (αν ήταν από τη θεωρία $\Delta_1<0$ και $\Delta_2>0$)

$C = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : Q(x_1,x_2)=1\}$

Από θεωρία: Έστω $C = \{(x_1, x_2) : Q(x_1,x_2)=1\}$. Τότε C έλλειψη $\Leftrightarrow rank(Q)=2$, $i(Q)=2 \Leftrightarrow Q$ θετικά ορισμένη $\Leftrightarrow$ $\Delta_1>0, \Delta_2>0$

C υπερβολή $\Leftrightarrow rk(Q)=2$, $i(Q)=1 \Leftrightarrow A$ έχει μία αρνητική και μία θετική ιδιοτιμή $\Leftrightarrow \Delta_2 = \det A < 0$

Αφού $\Delta_2 = \det A < 0 \Rightarrow C$ υπερβολή

<u>Άσκηση 2</u>

(i) $xy-1=0 \Rightarrow xy=1$. Εδώ $Q(x,y)=xy$

πίνακας$(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_2 = \det(A) = -\frac{1}{4} < 0$

Άρα C υπερβολή

(ii) $\underbrace{5x^2-4xy+8y^2}_{Q(x,y)}=1$

$Q(x,y)$ πίνακας$(Q) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1 = 5>0$

$\Delta_2 = \det A = 36 > 0.$

Άρα C έλλειψη

(iii), (iv) παρόμοια με την (ii)

(v) $\underbrace{3x^2-6xy-5y^2}_{Q(x,y)}-6x+22y=-24$

$A=$ πίνακας$(Q) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -3 \\ -3 & -5-x \end{vmatrix} =$

$= x^2+2x-24 = (x-(-6))(x-4)$. ιδιοτ. A $\lambda_1=-6$, $\lambda_2=4$

Υπολογίζουμε $V_A(-6)$ και βρίσκουμε ότι έχει ορθοκανονική βάση $\langle g_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \rangle$. Υπολογίζουμε $V_A(4)$ και βρίσκουμε ότι έχει ορθοκανονική βάση $g_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$. Θέτουμε $P = [g_1^t | g_2^t]$

$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ Από θεωρία $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Θέτουμε $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} \tau r(x^t A x) \\ x = P z \\ \tau r(z^t P^{-1} A P z) \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{z_1 + 3z_2}{\sqrt{10}} \\ \frac{3z_1 - z_2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

. Η εξίσωση γίνεται $-6z_1^2 + 4z_2^2 - 6\left(\frac{z_1+3z_2}{\sqrt{10}}\right) + 22\left(\frac{3z_1 - z_2}{\sqrt{10}}\right) + 24 = 0$

$-6(z_1 - c_1)^2 + 4(z_2 - c_2)^2 + c_3 = 0$. Υπολ. τα c_1, c_2, c_3. Πρέπει $\frac{-6}{\sqrt{10}} + 22\frac{3}{\sqrt{10}}$ $= 12c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{-6}{\sqrt{2}\sqrt{10}} + \frac{22}{12}\frac{3}{\sqrt{10}}$ Έχουμε $\frac{-18}{\sqrt{10}} - \frac{22}{\sqrt{10}} = -8c_2 \Rightarrow c_2 = \dots$

Επίσης έχουμε $-6c_1^2 - 8c_2^2 + c_3 = 24 \Rightarrow c_3 = \dots$

Συμπέρασμα, $z_1'' = z_1 - c_1$, $z_2'' = z_2 - c_2$ $\quad -6(z_1')^2 + 4(z_2')^2 = -c_3$

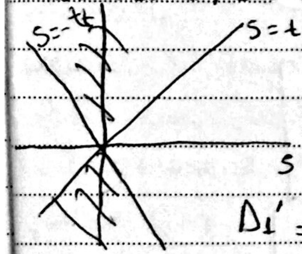
Αν $c_3 \neq 0$ υπερβολή αλλιώς ζεύγος ευθειών.

Άσκηση 3

$\underbrace{sx^2 + sy^2 - 2txy}_{Q(x,y)} = s$

1η περίπτωση $s = 0$. Αφού $(s,t) \neq (0,0) \Rightarrow t \neq 0$. Η εξίσωση $-2txy = 0 \Rightarrow xy = 0$. Άρα η καμπύλη είναι ένωση x, y αξόνων $=$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ή } y = 0\}$

Υποθ. ότι $s \neq 0$. Τότε υπερβολή $\Leftrightarrow \Delta_2 < 0 \Leftrightarrow s^2 - t^2 < 0$



$$x^2 + y^2 - \frac{2t}{s}xy = 1$$

Άρα έχουμε τον πίνακα $A' = \begin{bmatrix} 1 & -t/s \\ -t/s & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta_1' = 1 \quad \Delta_2' = 1 - \frac{t^2}{s^2}$ Άρα για $\Delta_1' > 0, \Delta_2' > 0 \Leftrightarrow$
έλλειψη. Άρα έλλειψη $\Leftrightarrow s^2 - t^2 > 0$

Περίπτωση που μένει $s = t \neq 0$. Η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow$
$(x-y)^2 - 1^2 = 0 = (x-y-1)(x-y+1) = 0$. Για $s = t \neq 0$ έχω ένωση 2 ευθειών

Συμπερασματικά:

Για $s \neq 0$ • ΥΠΕΡΒΟΛΗ $\Leftrightarrow s^2 < t^2$

έλλειψη $\Leftrightarrow s^2 > t^2$

2 ευθείες $\Leftrightarrow s^2 = t^2$

Άσκηση 4

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad Q(x,y,z) = 9x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy$

πίνακας$(Q) = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = |A - xI_3| = -(x-3)(x-5)(x-10)$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 10$

Άρα $\lambda_i > 0$ για κάθε i ο A (και η Q) είναι θετικά ορισμένες. Ξέραμε ότι με αναγωγή στους κύριους άξονες η Q γίνεται $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 3z_1^2 + 5z_2^2 + 10z_3^2$. Άρα η τετραγωνική επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $Q(x,y,z) = 1$ έχει εξίσωση $3z_1^2 + 5z_2^2 + 10z_3^2 = 1$ άρα ελλειψοειδές

$V_A(3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$
$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases} \right\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

Ορθοκανονική βάση του $V_A(3) = (0,0,1) = g_1$

Ορθοκανονική βάση του $V_A(5) = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = g_2$

Ορθοκανονική βάση $V_A(10) = g_3 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0) = g_3$.

$P = [g_1^t | g_2^t | g_3^t] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

και από θεωρία $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Επομένως οι κύριοι άξονες της Q είναι οι 3 μονοδιάστατοι υπόχωροι $\langle g_1 \rangle, \langle g_2 \rangle, \langle g_3 \rangle$

Θέτουμε $B = P \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} P^{-1}$. Τότε αφού P ορθογώνιος άρα $P^{-1} = P^t$ έχουμε

B συμμετρικός, θετικά ορισμένος αφού έχει 3 θετικές ιδιοτιμές $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ και $B^2 = P \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}^2 P^{-1} = A$